Frühe mathematische Bildung
Prof. Gerhard Preiß, Freiburg (D)

- Entwicklung der grundlegenden Ideen aus der Beschäftigung mit Hirnforschung
- Projekte zur frühen mathematischen Bildung:

Entdeckungen im Entenland von Prof. Preiß

Entenland: für Kinder ab zweieinhalb Jahren

Entdeckungen im Zahlenland von Prof. Preiß

Zahlenland: für Kinder ab vier Jahren

Zahlengarten von Prof. Preiß

Zahlengarten: mathematische Bildung im Freien

Bildung von Anfang an
„Die vier goldenen Jahre der Erziehung und Bildung“

- Mathematische Bildung ist unerlässlich für ein selbst-bestimmtes Leben im 21. Jahrhundert
- Mathematische Bildung, wie sie im Zahlenland und Entenland realisiert wird, ist ein ganzheitlicher Prozess, der jedes einzelne Kind mit seinen Begabungen anspricht und fördert.

»Damit der Mensch zur Menschenwürde gebildet werden könne, hat ihm Gott die Jahre der Jugend verliehen.«

Jan Amos Comenius (1592-1670)

Galileo Galilei (1564-1642)
Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben

- Das Buch der Natur liegt **offen vor** uns.
- Doch ist es nur zu verstehen, wenn man die Sprache gelernt hat und seine Buchstaben kennt.
- Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.
- Die Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren.
- Bekanntschaft mit der Geometrie (EUKLID) machte unauslöschlichen Eindruck – wie auf Albert Einstein.

Leitgedanken bei der Entwicklung der Projekte zur frühen mathematischen Bildung

- Für jedes Kind ist mathematische Bildung wichtig und erreichbar.
- Die Anlagen eines Kinds können sich nur in aktiver Wechselwirkung mit der Umwelt entfalten.
- Mathematische Bildung ist geeignet, alle Kräfte des Gehirns zu fördern.
- Frühe Bildung nutzt die Jahre des mühelosen Lernens.
- Frühe Bildung muss nachhaltig wirken und erfordert strukturierte Lernangebote.

Didaktische Prinzipien

- Ganzheitlichkeit
- Selbstständigkeit und Selbsttätigkeit
- Miteinander (voneinander) Lernen
- Variation der Darstellungsform
- Lernen in Zusammenhängen
- Spiralprinzip (Wiederholung)

Entdeckungen im Entenland
Ordnung in der Welt

Lernfelder für Kinder ab zweieinhalb Jahren
von Prof. Gerhard Preiß

Entdeckungen im Entenland
Allgemeine Ziele

- Das Projekt »Entdeckungen im Entenland« wurde mit der Zielsetzung entwickelt, Kinder im Alter von zweieinhalb bis vier Jahren an **Methoden des Denkens** heranzuführen, die ihnen helfen,

  - **Wissen über die Welt aufzubauen** und
  - **mit ihrem Leben zu verbinden**.

Entdeckungen im Entenland
Ordnung in der Welt

- Der Zusatz »Ordnung in der Welt« umschreibt die allgemeine Zielsetzung des Projekts, die Kinder zu befähigen, in der Vielfalt und Flüchtigkeit der Dinge klare Strukturen und zuverlässige Beständigkeit zu erkennen.

> *»Der Glaube an eine Ordnung in der Welt ist in der Geschichte der Menschheit tief verankert; verbunden mit der Überzeugung, dass jeder Mensch grundsätzlich fähig ist, diese Ordnung zu erkennen und ein Leben lang danach strebt.«*
>
> Gerhard Preiß

Entwicklung allgemeiner Fähigkeiten

- Sortieren und Ordnen
- Erfahrungen mit Zahlen
- Orientierung im Raum und in der Zeit
- Sprachförderung

Entenland 1

- Lernfeld 1
  - Farben
  - Innen/außen

Sortieren und Orientierung im Raum

- Lernfeld 2
  - Ebene Formen
  - Ebene Formen in Kombination mit Farben

Sortieren

- Lernfeld 3
  - Zählen, Würfeln
  - Simultanerfassung

Sortieren und Ordnen

Entenland 2

- Lernfeld 4
  - Räumliche Figuren
  - Gewichte
  - Oben/unten

  Sortieren, Ordnen und Orientierung im Raum
- Lernfeld 5
  - Höhen, Längen
  - Vorne/hinten, rechts/links

  Sortieren, Ordnen und Orientierung im Raum
- Lernfeld 6
  - Vorher/nachher
  - Jahreszeiten

  Orientierung in der Zeit

Das Entenland

- Klare und überschaubare räumliche Ordnung
- Vertrauter Raum

Entenland 1

Die Struktur einer Lerneinheit

1. Begrüßung & Wiederholung

5. Entenbuch & Verabschiedung

Die Struktur einer Lerneinheit

1. Begrüßung & Wiederholung

2. Neues

3. Spiel mit Bewegung

4. Am See

5. Entenbuch & Verabschiedung

Ständig auftretende Elemente

- Bewegung und Musik
- Wiederholung, Fehler und Korrektur (Ente Oberschlau)
- Geschichten und Spiele
- Unterhaltung und Spannung (Fuchs)
- Offene Situationen und Gesprächsrunden

Kurzportraits der Hauptdarsteller:
Das Entenkind

- Neugierig erkundet das Entenkind die Welt.
- Es wird gesucht – *„Wo ist das Entenkind?“* – und bringt stets Neues mit.

Die sechs Geschichten aus dem Entenland

1. Mein Entenkind ist gelb
2. Mein Entenkind ist rund
3. Das Entenkind im Labyrinth
4. Die Katze weiß, wo das Entenkind ist
5. Das Entenkind fährt Kutsche
6. Noch schläft der Fuchs

Der Fuchs

- Der Fuchs sorgt im Entenland für Spannung.
- Nachts schleicht der Fuchs im Entenland umher, bringt *Dinge durcheinander* und nimmt manchmal einige mit *in seine Höhle*.
- Für die Enten stellt er eine Gefahr dar, aber nicht für die Kinder.

Die Ente Oberschlau

- Die Ente Oberschlau hält sich für besonders schlau, überschätzt aber ständig ihre Fähigkeiten.
- Sie tritt auf, nachdem sich die Kinder mit dem neuen Problem der Lerneinheit beschäftigt haben.
- Die Aufgaben kann sie alleine nicht lösen und nimmt dankbar die *Hilfe der Kinder* an.

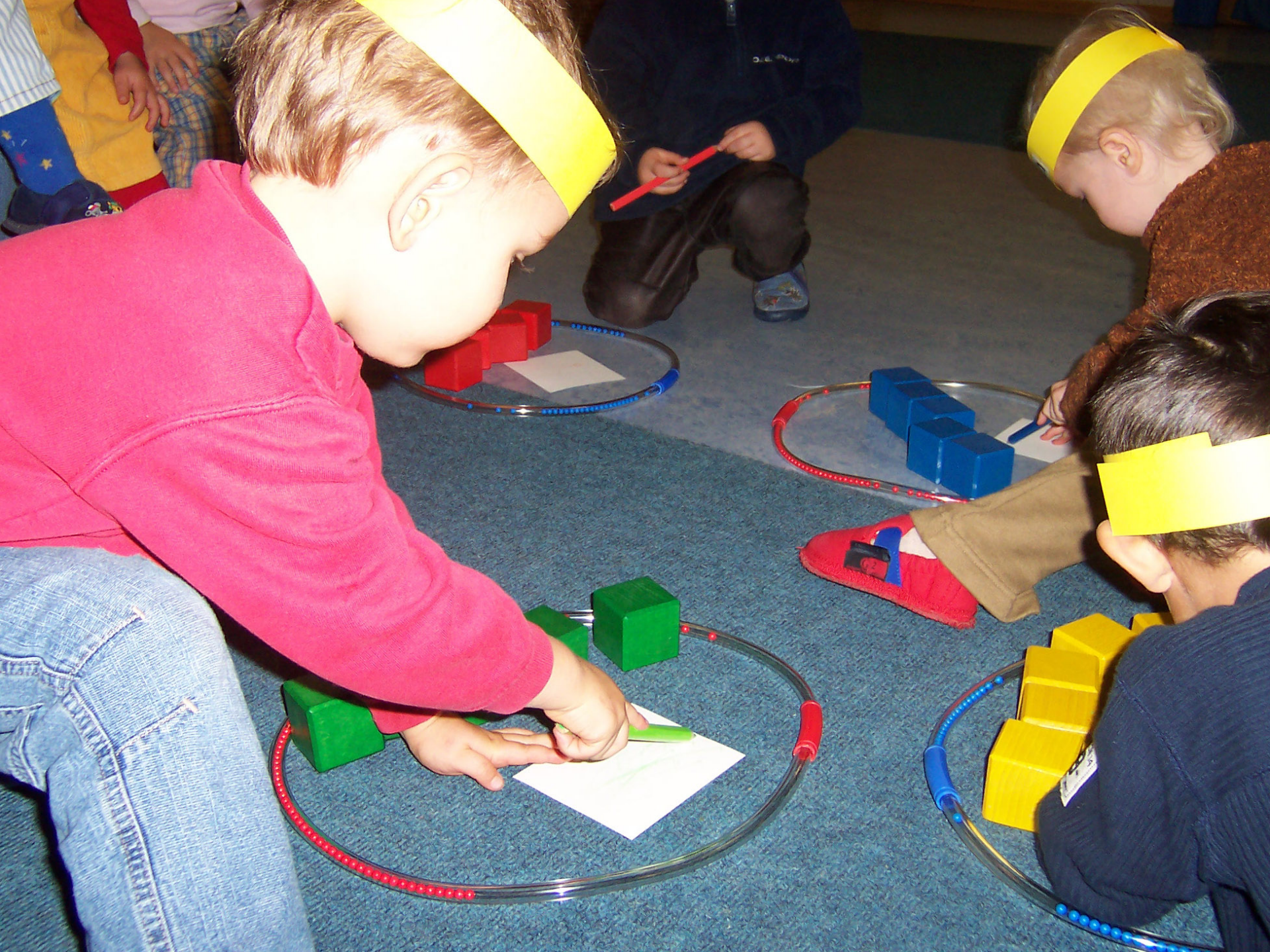
„Ich bin die Ente Oberschlau“

Ich bin die Ente Oberschlau
und weiß schon alles ganz genau.
Ich mache alles ganz allein,
denn niemand kann's wie ich so fein.

Der Rabe Ratemal

- Alt und klug ist der Rabe Ratemal.
- Er fliegt von seinem Berg zum See im Tal und will wissen, ob die Kinder klug genug sind, seine *Rätsel* zu lösen.

Sortieren nach Farbe



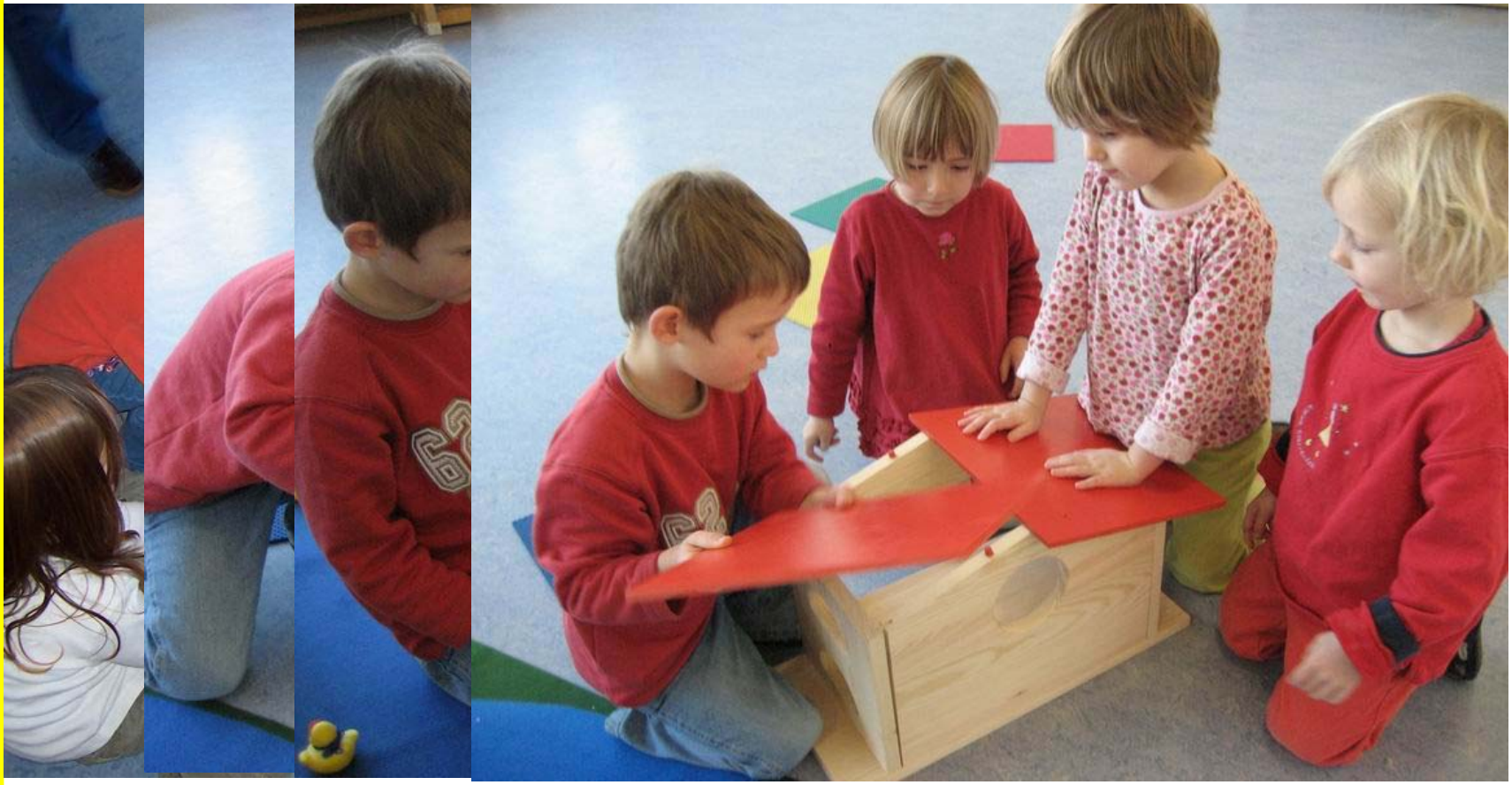
Philipp
Sarah

Das Entenhaus

Das Entenhaus

Das Entenhaus

Das Entenhaus



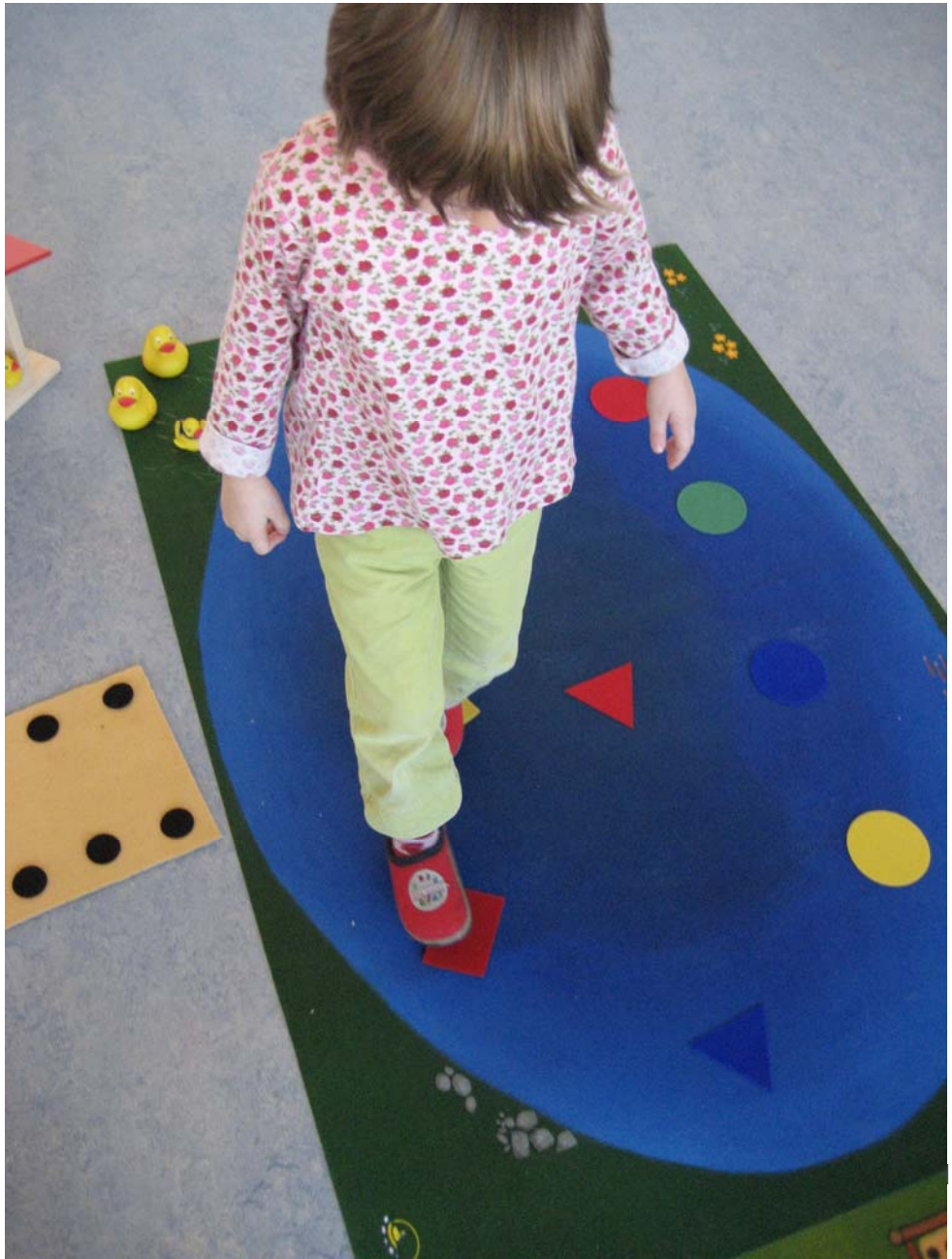
Das Entenhaus

Die Ente Oberschlau

Ebene Formen

Ebene Formen

See überqueren



Mit dem Würfel auf dem Entenweg

Entenfangen

Das Entenbuch

Charlotte
Amely

Experiment zur Simultanerfassung

- Simultanerfassung im engen Sinn:
  1 bis 4/5
- Simultanerfassung im erweiterten Sinn:
  5 bis 8, 9, ..

www.zahlenland.info

„Entdeckungen im Zahlenland“

Ein Projekt zur frühen mathematischen Bildung von Gerhard Preiß

Entdeckungen im Zahlenland
von Prof. Preiß

DAEKYO - Südkorea

- Detailliert ausgearbeitetes Programm 2003 geliefert
- Innerhalb von 9 Monaten auf dem Markt

Südkorea gehört (bekanntlich) zu den PISA-Siegerländern.

Geschichten, die sich rechnen

- Enger Zusammenhang zwischen dem Verständnis für Geschichten (4 Jahre) und dem Verständnis für Mathematik (6 Jahre)
- Dinge, die nur in der Vorstellung existieren, phantasievoll und kreativ verknüpfen

Daniela O‘Neill, kanadische Wissenschaftlerin (2004)

Schweizer Nachrichtenmagazin FACTS (05.08.2004)

Video „Die Fünf hat Geburtstag“

Mathematik für alle Kinder

- Eine moderne Industriegesellschaft kann es sich nicht leisten, die erstaunliche Fähigkeit des menschlichen Gehirns, Mathematik zu verstehen und anzuwenden, als seltene und naturgegebene Begabung weniger Menschen aufzufassen.
- Auch mathematische Begabung entfaltet sich dann am besten, wenn Kinder sich früh im Lernen üben und ihre Neigungen erproben können.

Didaktische Aspekte der Zahlen

Codierungsaspekt	Namen zur Unterscheidung von Objekten. Beispiele: Telefonnummer, Postleitzahl, Pin
Kardinaler Aspekt	Anzahl der Elemente einer Menge. Frage: „Wie viele?“ Beispiele: 5 Steine, 7 Kinder
Ordinaler Aspekt	Rangplatz. Frage: „Der/die wievielte?“ Beispiele: der erste, die siebte, der letzte
Operatoraspekt	Verbindung mit einer Handlung. Frage: „Wie oft?“ Beispiele: einmal, zehnmal
Maßzahlaspekt	Beschreibung von Größen. Beispiele für Fragen: „Wie lang?“, „Wie schwer?“, „Wie teuer?“, „Wie groß?“
Rechenaspekt	Rechnen mit Zahlen. Beispiele: 5 + 7 = 12, 12 = 3 x 4, 2 x 5 + 2 = 12
Geometrischer Aspekt	Zahlen in geometrischen Zusammenhängen. Beispiele: Dreieck, Viereck, Tetraeder, Würfel
Narrativer Aspekt	Symbolische Bedeutung (Märchen, Kulturen) Beispiele: Glück/Unglück 7/13, Christentum 3, Islam 5

Mathematik und mehr…

Mathematische Ziele

Fachübergreifende Ziele

Allgemeine Ziele

Mathematische Ziele

- Fundierung eines **weiten Zahlbegriffs**
- Systematischer Aufbau aus Wahrnehmung und Handeln:
  - Vertrautheit mit Eigenschaften und Anwendungen der Zahlen 1 bis 10
  - Überblick über den Zahlenraum von 1 bis 20
  - Einfache Beispiele (Vorstellungen) zum Rechnen
  - Geometrische Figuren in der Ebene und im Raum
  - Lösen von Problemen durch Nachdenken
  - Behutsame Einführung in Fachbegriffe und Symbole

Fachübergreifende Ziele

- Aufbau von Wissen über die Welt durch die Einbettung des „Zahlenlandes“ in die **Lebenswelt der Kinder**
- **Wahrnehmung und Beschreibung der Welt** mit Hilfe von Zahlen und geometrischen Formen:
  - Pflanzen- und Tierwelt
  - Takt und Harmonien
  - Zahlen und Formen in Kunst und Kultur
  - Lebensraum der Kinder: Wohnung, Gegenstände des Alltags, technische Geräte etc.

Allgemeine Ziele

- Übung der Aufmerksamkeit
- Entwicklung der Wahrnehmung
- Verfeinerung der Motorik
- Erprobung von Gedächtnis, Phantasie und Verstand
- Umgang mit Zahlen und geometrischen Formen als erfreuliches, wertvolles und erreichbares Ziel erleben

Die drei Handlungs- und Erfahrungsfelder

Der Aufbau des Zahlbegriffs erfolgt im Rahmen von drei Handlungs- und Erfahrungsfeldern:

- **Zahlenhaus**
- **Zahlenweg**
- **Zahlenländer**

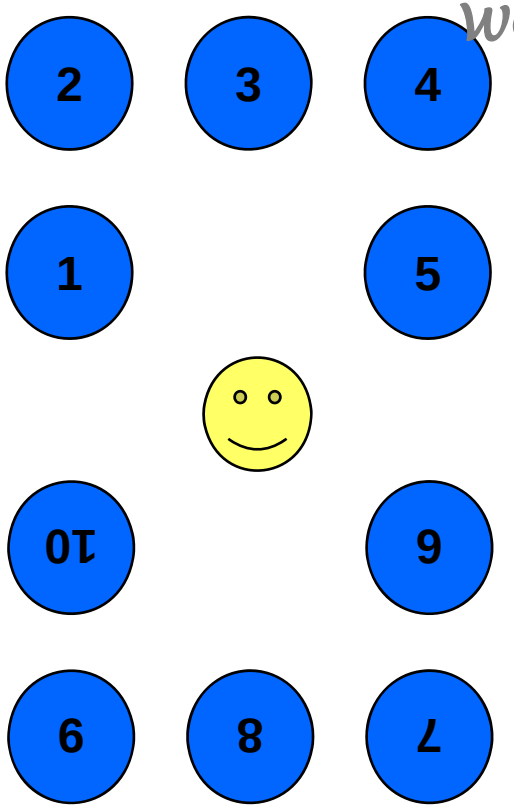
Lernen im Freien:

- **Zahlengarten**

Klare und gleich bleibende Struktur

- **Rituale** der Begrüßung und Verabschiedung
  - der Kinder und
  - der Zahlen
- **Wiederholungen** bei zunehmender Selbständigkeit

Wisst ihr, wo die Zahlen wohnen?



Im Zahlenhaus

erhalten die Zahlen feste Orte.

Methode der Orte und Bilder

Das Zahlenhaus

- Im Zahlenhaus besitzt jede der Zahlen 1 bis 10 eine **Wohnung**.
- Durch die **Möblierung** der Wohnungen machen sich die Kinder mit den **Eigenschaften** der einzelnen Zahlen vertraut.

Im Zahlenhaus steht die **simultane Erfassung** der Zahlen im Vordergrund.

Jens
Lukas
4
Eva
5

Carolin

Carolin

Caro

5
5

Entenland 1

5

Die Methodik des Zahlenhauses (1)

- Bei der immer reichhaltiger werdenden Möblierung der Wohnungen, in denen sich Zahlaspekte spiegeln, bauen die Kinder eine enge Bekanntschaft mit den Zahlen auf und machen sich mit ihren Eigenschaften vertraut.
- Die Zahlen werden freundlich begrüßt, aufmerksam umsorgt und zum Schluss ebenso freundlich verabschiedet.

Die Methodik des Zahlenhauses (2)

Wichtige Konzepte:

- Die Simultanerfassung
  - Im Zahlenhaus soll wenig gezählt werden. Das Kind schaut hin und erfasst „mit einem Blick“ die Situation.
  - Diese Fähigkeit soll im Zahlenhaus entwickelt und nachhaltig gefördert werden.
- Der Mensch in der Mitte
- Die festen Orte der Zahlen
- Der geometrische Aspekt
- Tisch des Hauses
  - Möblierung von 6 bis 10 aus den Wohnungen von 1 bis 5

Der Zahlenweg

- Auf dem Zahlenweg nähert man sich den Zahlen **Schritt für Schritt**.
- Das wichtigste Hilfsmittel beim Zahlenweg ist das **Zählen**.
- Der Zahlenweg soll dem Kind so vertraut werden wie ein täglich begangener Pfad.
- An jeder Stelle kennt sich das Kind aus und weiß, wo es sich befindet, was vor ihm und was hinter ihm liegt - auch wenn es die **Augen schließt**.

Flexibles Zählen

- Zurückzählen
- Von jeder Stelle aus bis zu jeder Stelle zählen

Auf dem Zahlenweg verbinden sich
Sprache, Wahrnehmung und Bewegung.

Zu unterscheiden: Zählen, Abzählen und Auszählen

Entenland 1

Entenland 1

17
18

Entenland 1

Die Methodik des Zahlenwegs (1)

- Auf dem Zahlenweg gewinnen die Kinder einen Überblick über den Zahlenraum von 1 bis 10 bzw. bis 20.
- Das wichtigste Hilfsmittel beim Zahlenweg ist das Zählen.
- Lesen der Zahlen: Die Ziffern prägen sich dem Gedächtnis in der richtigen Reihenfolge und Nachbarschaft ein.

Die Methodik des Zahlenwegs (2)

Wichtige Konzepte:

- Der Zahlenweg im Kopf
  - Der Zahlenweg soll sich als Vorstellung im Kopf abbilden und dort so zuverlässig verfügbar sein wie ein häufig begangener, natürlicher Weg.
- Der ordinale Aspekt
- Flexibles/intelligentes Zählen
- Verbindung von Zählen mit Bewegung und Wahrnehmung

Fehlerteufel und Hausmeister

Fehlerteufel

- Sowohl im Zahlenhaus als auch auf dem Zahlenweg taucht regelmäßig der **Fehlerteufel** auf.
- Die Fehler werden von einem Kind behoben.

Hausmeister

- Im Zahlenhaus kontrolliert der **Hausmeister** (ein Kind), ob alles in Ordnung ist.
- Der Hausmeister lässt sich von den ZAHLEN berichten, welche Möbel in ihren Wohnungen sind.

2
3

Carolin
Marvin
ROOTS
ALL
STARS
LEAGUE CHAMPS
5

Die Zahlenländer

- In jedem der Zahlenländer herrscht **eine** Zahl:
  Im **Einerland** wohnt die **Eins**. Dort gibt es alle Dinge nur einmal.
  Die **Zwei** wohnt im **Zweierland**, wo alle Dinge paarweise auftreten, etc.
- Am Tor wacht ein strenger **Wächter** darüber, dass nur passende Dinge und Lebewesen eintreten.
  Wie komme ich ins Einerland oder Zweierland?
- In den Zahlenländern sieht man sich um, denkt nach, singt **Lieder**, löst **Rätsel** und ist **fröhlich**.
- **Geschichten** pflegen das Märchenhafte und regen Phantasie und Vorstellungsvermögen an.

Eva
Chiara
Carolin
Philipp
Clara
3

Geschichten und Entdeckungen in den Zahlenländern

Tiere und Pflanzen aus den Zahlenländern

Tiere und Pflanzen aus den Zahlenländern

Die Methodik der Zahlenländer (1)

- Die Idee von den Zahlenländern regt die Kinder an, sich umzusehen und darüber nachzudenken, in welchen Verkleidungen und in welchen Zusammenhängen Zahlen auftreten.
- Bei den Aktivitäten in den Zahlenländern wird jeweils eine Zahl in die Lebenswelt der Kinder gestellt:
  - durch ein Lied
  - durch Pflanzen und Tiere
  - Durch Objekte aus dem Alltag
  - durch Rätsel und Spiele

Die Methodik der Zahlenländer (2)

Wichtige Konzepte:

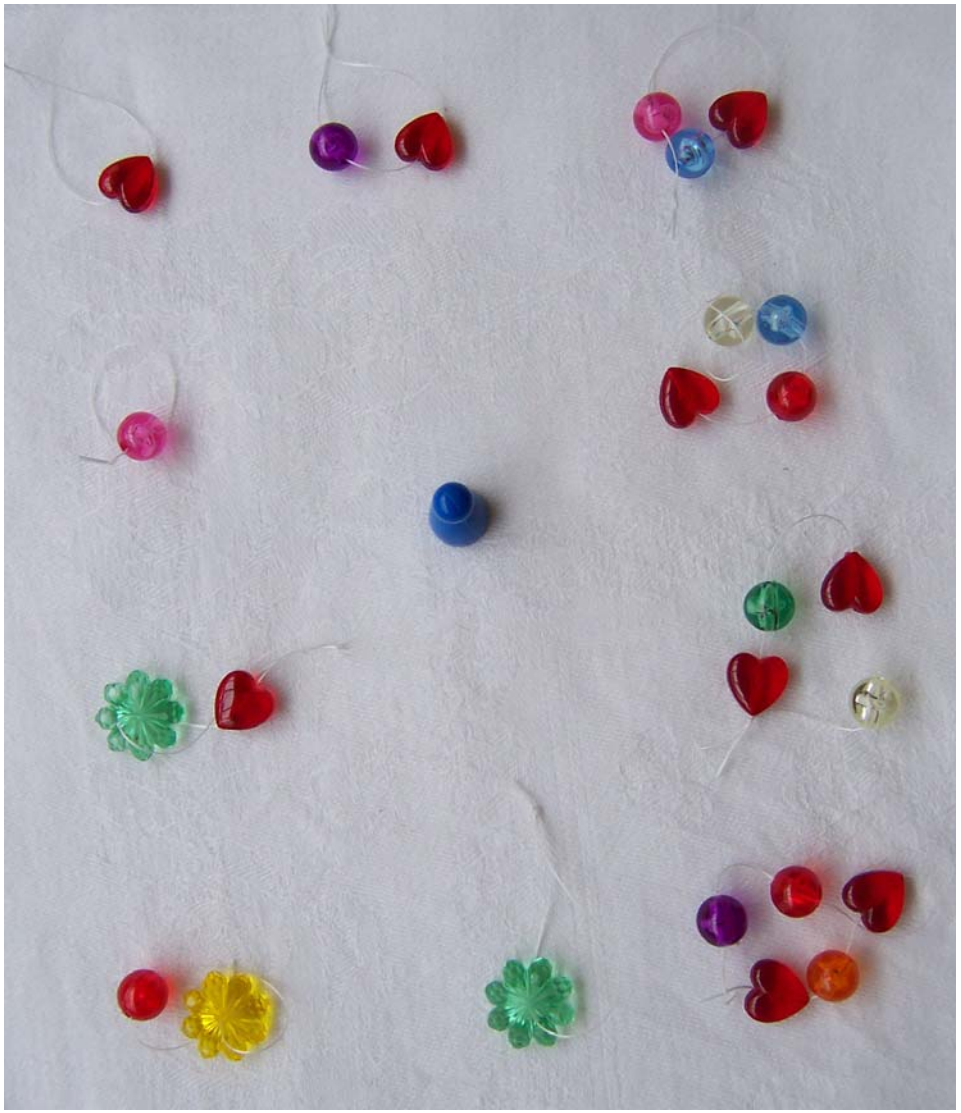
- Der narrative Aspekt der Zahlen
  - Geschichten aus dem Zahlenland
- Phantasie und Nachdenken
  - Was sage ich dem Torwächter?
- Fragen und Rätsel
- Bewegung und Fröhlichkeit

Die drei Handlungs- und Erfahrungsfelder
Zusammenfassung

- „Willst du wissen, was eine Zahl ist?
  - „Dann komm mit mir ins Zahlenhaus
    und schaue dir die Wohnungen der Zahlen an!“
- „Willst du erfahren, welche Ordnung bei den Zahlen herrscht?“
  - „So geh‘ mit mir auf dem Zahlenweg!“
- „Willst Du erleben, wo wir den Zahlen begegnen?“
  - „Dann besuche mit mir die Zahlenländer!“

Geschenke für 1 bis 10 von Ella K. (5 J.)

Geschenke für 1 bis 10 – Anordnung wie im Zahlenhaus



Der Zahlengarten

Begegnungen mit Zahlen und Formen im Freien

Gerhard Preiß

Der Traum von Paradiesgärtlein

- Es gibt vielerlei Gärten: Obstgärten, Blumengärten, Gemüsegärten, Schrebergärten, Zoologische Gärten, Steingärten, Alpengärten, Biergärten, Kindergärten
- In der Spätgotik „Paradiesgärtlein“: Maria mit dem Jesuskind auf Blumenwiese, geschützt von einer Mauer oder Rosenhecke
- „Comenius-Gärten“: J. A. Comenius (1592-1670) wollte ein Paradies pflanzen, in dem der Mensch durch Erziehung zu sich selbst findet.

Das erste Gärtlein für die Zahl DREI

Der erste Zahlengarten

Max-Planck-Realschule Bad Krozingen
(zwischen Freiburg und Basel)

Welchen Zielen dient ein Zahlengarten?

- Vertrauter Umgang mit Zahlen und ihren Eigenschaften
- Erschließung ihrer Anwendungen
- Aktives und ganzheitliches Lernen in freier Natur
- Verbindung verschiedener Fächer
- Beschäftigung mit geometrischen Formen und Mustern
- Ort der Begegnung zwischen Kindergarten, Schule und Öffentlichkeit

Entenland 1

Entenland 1

Entenland 1

Der Zahlengarten als Ort des Lernens

- Säulen des Lernens im Zahlengarten: sinnliche Erfahrung und natürlicher Entdeckungsdrang
  - gefördert durch Spiele, Rätsel und Aufgaben zur Arithmetik und zur Geometrie
- Neugier und Eigeninitiative erhalten Nahrung
  - angeregt werden Erkunden und Nachdenken.
- Der Zahlengarten lädt zum Experimentieren ein
  - aber auch zum Erzählen und Phantasieren.

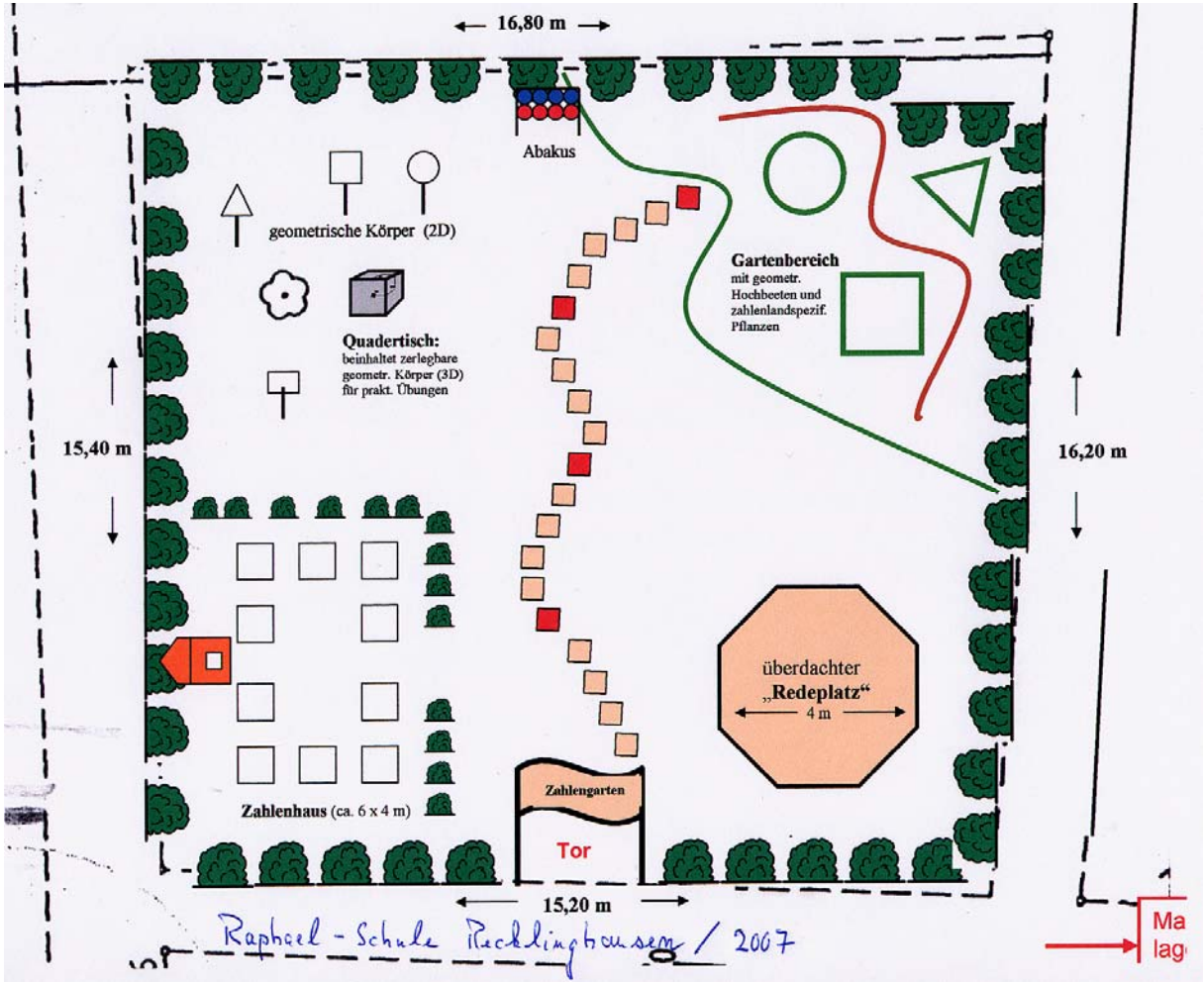
Entenland 1

Entenland 1

Soziales Lernen und Ort der Begegnung

- Der Zahlengarten unterstützt ein soziales Lernen.
- Er ist geeignet
  - für Veranstaltungen und
  - als Begegnungsstätte mit Menschen aus dem Gemeinwesen.
- Er bietet sich an für Kooperationsprojekte zwischen Kindergarten und Grundschule.

Plan für einen Zahlengarten der Raphael-Schule in Recklinghausen



2
3
ZAHLEN
GARTEN

Bezug zur Geometrie

- Hantieren mit geometrischen Formen und Figuren und aktive Wahrnehmung von Lage und Raum:
  - unterstützen Entwicklung und Differenzierung der Sinnesleistungen.
- Ein breites Verständnis für Zahlen erfordert geometrische Erfahrungen, die im Zahlengarten erworben werden können:
  - Basis für unsere Vorstellungen von den Zahlen

Entenland 1

Entenland 1

Entenland 1

Informationen im Internet:

www.zahlenland.info

(Publikationen, Seminare)

E-Mail: kontakt@zahlenland.info